Aula 10

Sucessões em $\mathbb{C}$

$$\{z_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \qquad z_n = x_n + iy_n$$

Definição: Diz-se que $L \in \mathbb{C}$ é o **limite da sucessão** $\{z_n\}$, ou que $\{z_n\}$ **converge para** $L \in \mathbb{C}$, e representa-se $\lim z_n = L$ ou $z_n \to L$, se qualquer que seja a bola centrada em L, $B_\delta(L)$ existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$ os correspondentes termos da sucessão estão todos nessa bola, $z_n \in B_\delta(L)$. Ou seja,

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N \Rightarrow |z_n - L| < \delta,$$

ou ainda, no sentido de $\mathbb{R}$

$$d(z_n, L) = |z_n - L| \to 0.$$

Chama-se **sucessão convergente** a uma sucessão que tem limite complexo e sucessão **sucessão divergente** no caso contrário.

Proposição: Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos, $z_n = x_n + i\,y_n$ e $L = a + i\,b \in \mathbb{C}$. Então

$$z_n \to L \text{ em } \mathbb{C} \Leftrightarrow x_n \to a \quad \text{e} \quad y_n \to b \text{ em } \mathbb{R}.$$

Proposição: Toda a sucessão convergente é limitada e o limite é único.

Proposição: Sejam $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ sucessões complexas convergentes tais que $z_n \to z$ e $w_n \to w$. Então

- $z_n \pm w_n \to z \pm w$.
- $z_n w_n \to zw$.
- $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w} \qquad (w_n, w \neq 0)$.

Sucessões e Topologia

<u>Proposição:</u> Dado um conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ um ponto z é aderente a Ω, ou seja, $z \in \overline{\Omega}$ se e só se existe uma sucessão $\{z_n\}$ de pontos em Ω, $z_n \in \Omega$, tal que $z_n \to z$.

<u>Proposição:</u> Um conjunto $F \subset \mathbb{C}$ é fechado se e só se qualquer sucessão convergente $\{z_n\}$ de pontos em F, $z_n \in F$, satisfaz $\lim z_n \in F$.

Limites infinitos

$$\lim z_n = \infty???$$

Definição: Diz-se que uma sucessão complexa $\{z_n\}$ tende para infinito, $\lim z_n = \infty$, se satisfaz

$$\forall_{R>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n > N \Rightarrow |z_n| > R.$$

Nesse sentido

$$\begin{aligned}
z + \infty &= \infty \\
z \cdot \infty &= \infty \qquad (z \neq 0) \\
\infty + \infty &= \infty \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\frac{z}{\infty} &= 0 \\
\frac{z}{0} &= \infty \qquad (z \neq 0)
\end{aligned}$$

mas

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

são **indeterminações**.

Completude

Definição: Diz-se que uma sucessão $\{z_n\}$ num espaço métrico é uma **sucessão de Cauchy** se satisfaz

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} : n.m > N \Rightarrow d(z_n, z_m) < \delta.$$

Diz-se que um espaço métrico é **completo** se todas as sucessões de Cauchy são convergentes.

Teorema (Bolzano-Weiertsrass): Toda a sucessão complexa $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, limitada, isto é, tal que existe um $M > 0$ para o qual $|z_n| \leq M$, tem pelo menos uma subsucessão convergente.

Teorema: O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos com a distância dada por $d(z, w) = |z - w|$ é um espaço métrico completo, ou seja, uma sucessão é convergente se e só se é de Cauchy.